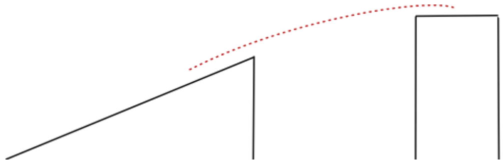
Un cascadeur doit effectuer une acrobatie motorisée qui consiste à sauter d'une rampe et atteindre le haut d'une plateforme.

La rampe a une pente de 30°, l'écart entre la pente et la plateforme est de 8 m, et la différence de hauteur entre le haut de la pente et la plateforme est de 2 m.



Déterminer la vitesse à laquelle le cascadeur doit régler son véhicule au moment de quitter la rampe afin d'arriver sur la plateforme presque à l'horizontale.

On rappelle les fonctions de position d'un projectile dans deux dimensions :

$$x = v\,cos(\theta)t \qquad\qquad y = v\,sin(\theta)t - \frac{g}{2}t^2$$

Procédure :

Une bonne idée serait d'avoir une fonction de la hauteur, en fonction de la portée. En d'autres termes : $y(x)$.

On résout donc la première expression pour t :

$$t = \frac{x}{v cos(\theta)}$$

Et on inclut le résultat dans la deuxième expression :

$$y = tan(\theta)x - \frac{g}{2v^2cos^2(\theta)}x^2$$

Maintenant, nous recherchons la vitesse que doit avoir le véhicule pour arriver sur la plateforme à l'horizontale. En regardant le schéma (ou en imaginant un peu), on se rend compte que cela correspond aux coordonnées de l'extremum de la fonction. Et on les connaît, ces coordonnées : prenant l'origine à la fin de la rampe, c'est $(8; 2)$.

Généralement, pour trouver les coordonnées de l'extremum d'un polynôme de degré 2, on prend sa dérivée :

$$y = tan(\theta)x - \frac{1}{v^2}\frac{g}{2cos^2(\theta)}x^2$$

$$y' = tan(\theta) - \frac{1}{v^2}\frac{g}{cos^2(\theta)}x$$

On sait que la coordonnée x de l'extremum est atteinte lorsque y' est égal à zéro. Et la coordonnée x de l'extremum, on vient de dire que c'est 8.

On applique cette information à la dérivée :

$$\frac{g}{v^2cos^2(\theta)}x = tan(\theta)$$

$$x = \frac{v^2cos^2(\theta)tan(\theta)}{g}$$

$$8 = \frac{v^2cos^2(30)tan(30)}{9.81}$$

Et on résout pour v :

$$v = \sqrt{\frac{9.81 \times 8}{cos^2(30)tan(30)}}$$

$$v = 13.5\, m.s^{-1}$$

On vérifie que le véhicule ne va pas s'écraser sur un des piliers de la plateforme en calculant la coordonnée verticale de l'extremum :

$$y = tan(\theta)x - \frac{1}{v^2}\frac{g}{2cos^2(\theta)}x^2$$

La hauteur par rapport au haut de la rampe est de 2 mètres : la cascade va-t-elle devenir un désastre ?

On dépasse de trente centimètre – ça va.

Maintenant, il y aurait bien une manière de *mal* répondre à cet exercice – en gros, faire de bonnes maths mais de la mauvaise physique.

On reprend la fonction :

$$y = tan(\theta)x - \frac{g}{2v^2cos^2(\theta)}x^2$$

Il se trouve que, comme on l'a dit, l'énoncé nous donne les coordonnées de l'extremum. Ca nous ferait une équation avec une inconnue : simple, non ?

$$tan(\theta)x - y = \frac{g}{2v^2cos^2(\theta)}x^2$$

$$\frac{tan(\theta)x - y}{gx^2} = \frac{1}{2v^2cos^2(\theta)}$$

$$\frac{gx^2}{tan(\theta)x - y} = 2v^2cos^2(\theta)$$

$$\sqrt{\frac{gx^2}{2cos^2(\theta)(tan(\theta)x - y)}} = v$$

Ça donne 26 mètres par seconde.

Mathématiquement, c'est juste. Mais réfléchissons. Ou plutôt non : montons dans une voiture, allons en bas de la rampe, et posons-nous la question : est-ce que je veux une vitesse qui m'amènera à la plateforme, ou le double de la vitesse qui m'amènera à une hauteur bien plus haute (environ 9m) mais qui passera en effet par ce point ?